DS n°9 : DL, espaces vectoriels, applications linéaires

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Exercice 1 : analyse asymptotique

Les question de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer le DL_3 en 0 de $\text{th}x$. En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{th}^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$.

2) Déterminer le DL_2 en 0 de $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3) Pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, on pose $f(x)=(1+x)^{1/x}$. Déterminer le DL_3 en 0 de f. En déduire que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et donner $f(0)$, $f'(0)$, l'équation de la tangente en 0, ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(1+x^2)-x$. On cherche à déterminer le DL_4 en 0 de sa réciproque.

- **a)** Déterminer le DL_4 en 0 de f.
- **b)** Montrer que f est bijective.
- **c)** Justifier que f^{-1} admet un DL_4 en 0, sans le calculer explicitement.
  Il existe donc $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(y)=a+by+cy^2+dy^3+ey^4+\underset{y\to 0}{o}(y^4)$.
- **d)** En déduire une expression du DL_4 en 0 de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a,b,c,d,e. Conclure.

Exercice 2 : trois questions indépendantes d'algèbre linéaire

1) On considère l'application $f : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X]$ définie par $f(P)=P-P'+P''$. On admet que f est linéaire. Déterminer $\text{Ker}\, f$ puis $\text{Im}\, f$. Que peut-on en déduire pour f ?

2) Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{E}=\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on considère les sous-ensembles F et G définis comme suit :

- F est constitué des matrices de $\mathcal{E}$ dont la somme des coefficients est nulle, soit :
$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{E}\;\middle|\; a+b+c+d=0\right\}$$
- G est l'ensemble des matrices scalaires, soit $G=\{\lambda I_2 \mid \lambda\in\mathbb{K}\}$.

- **a)** On note E_{ij} la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{E}$. Montrer que $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ est une base de $\mathcal{E}$ sans utiliser d'argument de dimension.
- **b)** Établir que F est un s.e.v. de $\mathcal{E}$ et déterminer une base de F en fonction des matrices E_{ij}.
- **c)** On *admet* que G est un s.e.v. de $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{E}=F\oplus G$.

3) **(difficile)** Soit $n,p\in\mathbb{N}^*$, et deux applications linéaires $u:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^p$ et $v:\mathbb{K}^p\to\mathbb{K}^n$. On suppose que $v\circ u=\text{id}_{\mathbb{K}^n}$ et que $u\circ v=\text{id}_{\mathbb{K}^p}$. Montrer que $n=p$.

Problème : noyaux itérés d'un morphisme

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. non réduit à $\{0_E\}$. Soit f un endomorphisme de E. On note id_E l'endormorphisme identité de E et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$ avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

On étudie la question de savoir s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ et $\mathrm{Im}\,(f^p)$ sont supplémentaires. Si c'est le cas, on notera p_0 le plus petit tel entier p. *Les trois parties de ce problème sont indépendantes.*

Partie A : quelques cas particuliers

1) On suppose que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer p_0.

2) On suppose que f est bijectif. Déterminer p_0.

3) (Bonus) On suppose que f est un projecteur. Déterminer p_0.

Partie B : Un autre cas très particulier

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On pose f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(e_1) = e_3 \qquad f(e_2) = -e_1 + e_4 \qquad f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \qquad f(e_4) = -e_3$$

4) Sans les calculer ou les déterminer, montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ ne sont pas en somme directe.

5) Déterminer f, c'est-à-dire, pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, déterminer $f(x, y, z, t)$.

6) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ et une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

7) Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, déterminer $f^2(e_k)$ et $f^3(e_k)$.

8) Déterminer p_0.

Partie C : noyaux itérés

On suppose ici que E est de dimension finie (non nulle) et que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

9) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Ker}\,(f^k) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$.

10) En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f^m) = \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$. Soit m_0 le plus petit tel entier m.

11) Démontrer que pour tout $k \geq m_0$, on a $\mathrm{Ker}\,(f^k) = \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$.

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Ker}\,(f^{m_0}) = \mathrm{Ker}\,(f^{m_0+q})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

12) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f^{m_0})$ et $\mathrm{Ker}\,(f^{m_0})$ sont en somme directe, puis qu'ils sont supplémentaires dans E.

13) Montrer que m_0 est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Im}\,(f^p)$ et $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $p_0 = m_0$.

14) Soit $u : \mathrm{Im}\,(f^{m_0}) \to \mathrm{Im}\,(f^{m_0})$ définie pour tout $x \in E$ par $u(x) = f(x)$. Montrer que u est bien définie et que c'est un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(f^{m_0})$.

Pourquoi les applications linéaires sont gentilles ? Parce qu'elles ont un Ker !